

# Irrfahrt-Probleme – eine Ergänzung zur Käferwanderung auf dem Würfel

GERD RIEHL, BARSINGHAUSEN

**Zusammenfassung:** Wir greifen das Problem der „Käferwanderung auf dem Würfel“ (Winkenbach 2011) auf und schlagen für seine unterrichtliche Behandlung einige Ergänzungen vor:

Durch zwei methodische Variationen kann man es Grundschulern erleichtern, die stochastische Situation zu erfassen und die Lösung des Problems aus dem Sachzusammenhang heraus zu verstehen.

Die Aufgabe reizt aber auch zu weiterführenden Fragestellungen, die man dann allerdings erst auf höheren Klassenstufen behandeln kann, bis hin zu einem Einstieg in das Gebiet der Irrfahrt-Probleme.

## 1 Einleitung

Es geht um folgende Situation: „Ein Käfer krabbelt auf den Kanten eines Würfels entlang. Er startet an

der Ecke A und möchte die gegenüberliegende Ecke Z erreichen. ... (Er) geht an jeder Ecke – also auch bei A – auf gut Glück in eine der Richtungen, aber niemals zurück. Für eine Kante braucht er immer genau eine Minute. Nach drei Minuten ist er müde und hört auf.“ (Winkenbach 2011, Abb. 1 links).

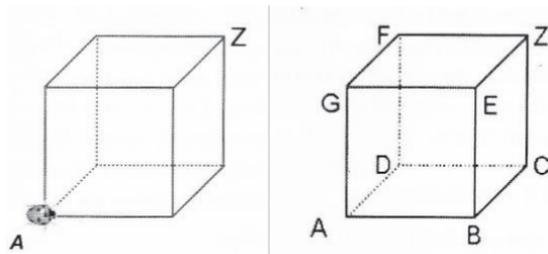


Abb. 1: Skizze zur Käferwanderung und Bezeichnungen bei Winkenbach (2011)



startet in A und alle wollen Gedrängel auf den Würfelkanten möglichst vermeiden. Wie viele von ihnen werden wohl nach drei Minuten in Z angekommen sein und wie viele an einer anderen Ecke?“

Die Schüler werden damit aufgefordert, die Aufgabe mit der Methode der *natürlichen Häufigkeiten* zu bearbeiten, also die nach 1, 2 bzw. 3 Minuten erwarteten absoluten Häufigkeiten an den verschiedenen Würfelcken zu bestimmen. Die Ergebnisse zeigt Tabelle 1.

$k$	A	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	Z
0	12	0	0	0	0	0	0	0
1	0	4	4	4	0	0	0	0
2	0	0	0	0	4	4	4	0
3	0	2	2	2	0	0	0	6

Tab. 1: Nach  $k$  Minuten erwartete Käferzahlen

Wir erläutern die Werte in der Zeile für  $k=2$ : Von  $B_1$  krabbeln je 2 Käfer nach  $C_2$  bzw.  $C_3$ ; aber auch je 2 Käfer aus Richtung  $B_3$  bzw.  $B_2$  erreichen diese Ecken, sodass dort (und wegen der Symmetrie auch in  $C_1$ ) mit je 4 Käfern zu rechnen ist. Von diesen wählen je 2 den Weg nach Z (so dass für  $k=3$  dort 6 zu erwarten sind), während die anderen beiden den zweiten erlaubten Weg nach  $\beta$  nehmen.

Auch die Tabelle zeigt wieder, dass in drei Minuten nur Z oder einer der Punkte  $B_i$  erreichbar ist und dass dann die Hälfte der Käfer in Z zu erwarten ist. Auch jedes andere Vielfache von 12 als Ausgangszahl am Start liefert dasselbe Ergebnis – und das ohne viel Theorie. Diese kommt erst bei weiterführende Fragen ins Spiel, die allerdings nur auf einer höheren Klassenstufe behandelt werden können.

### 3 Weiterkrabbeln – mit dem Ziel Z

Eine nahe liegende Verallgemeinerung der Aufgabe besteht darin, auf die Zeitbegrenzung von drei Minuten zu verzichten. Es geht also darum zu untersuchen, wie die Wanderung weitergeht, wenn der Käfer das Ziel Z nach 3 Minuten nicht erreicht hat.

#### Abstraktion 1 – Zustände statt Ecken beachten

Auch auf der Sekundarstufe I sollte man mit unserer Ausgangsaufgabe beginnen und dabei die Gleichwertigkeit der Ecken  $B_i$  bzw.  $C_i$  hinsichtlich der Fragestellung erarbeiten. Es genügt dann, die vom Käfer erreichte Position, etwa  $B_2$  oder  $C_1$ , kurz mit der zugehörigen Ebene als *Zustand*  $\beta$  bzw.  $\gamma$  zu bezeichnen. Dadurch vereinfacht sich das Baumdiagramm, mit dem die Schüler vermutlich an das Problem herangehen werden, erheblich (Abb. 4).

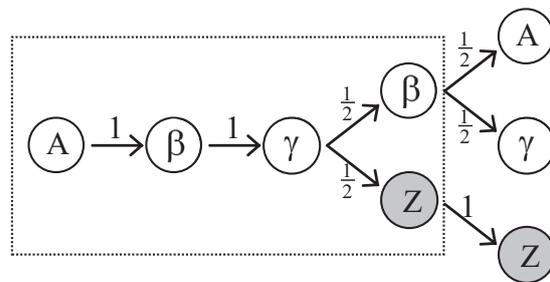


Abb. 4: Baumdiagramm zur Käferwanderung in den ersten vier Minuten

Der eingerahmte Teil der Abbildung liefert mithilfe der Pfadregeln wieder die Lösung der Aufgabe mit der Zeitbegrenzung auf drei Minuten. Die Fortsetzung (außerhalb des Rahmens) zeigt, dass der Käfer nach vier Minuten einen Zustand erreicht, in dem er schon einmal war (A wie beim Start,  $\gamma$  wie nach zwei Minuten oder Z, wo die Wanderung ja enden soll,  $Z \rightarrow Z$  hat daher die Wahrscheinlichkeit 1). Man nennt einen derartigen Zustand, der nicht mehr verlassen werden kann, *absorbierend*.

Beim Weiterzeichnen des Diagramms werden die Schüler schnell bemerken, dass der Käfer sich nach je zwei weiteren Minuten wieder in einem der drei Zustände A,  $\gamma$  oder Z befindet. Man kann daher eine weitere Vereinfachung vornehmen, indem man als Stufenabstand im Baumdiagramm 2 Minuten wählt.

Der Zustand  $\beta$  tritt dabei nicht mehr auf, da er nur in einer ungeraden Minutenzahl erreicht werden kann (Abb. 5 links). Die Wahrscheinlichkeiten der Wege, die zwischen zwei geraden Minutenzahlen möglich sind ( $A \rightarrow \gamma$ ,  $\gamma \rightarrow A$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma$ ,  $\gamma \rightarrow Z$ ) ergeben sich mithilfe der Pfadregeln aus Abbildung 4.

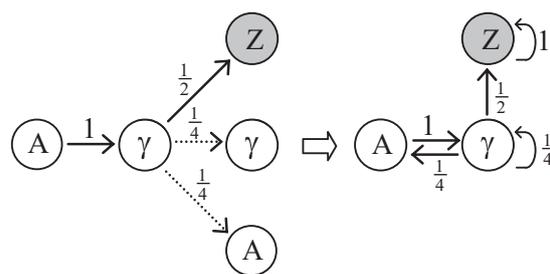


Abb. 5: links: reduziertes Baumdiagramm (nach Abb. 4) rechts: daraus abgeleiteter Übergangsgraph

#### Abstraktion 2 – Übergangsgraph

Wenn man den Prozess in einem Baumdiagramm darstellt, kommt man nie an ein Ende. Die rekursive Struktur des Problems, die sich in der regelmäßigen Wiederholung der Zustände A,  $\gamma$  und Z zeigt, lässt es jedoch überflüssig erscheinen, dass diese im Baumdiagramm (Abb. 5 links) mehrfach auftreten. Tatsächlich lässt sich dies vermeiden, indem man

die gestrichelt gezeichneten Pfeile „umbiegt“, so dass sie auf die bereits vorhandenen Zustände A und  $\gamma$  zeigen (Abb. 5 rechts). Ein Graph dieser Art heißt *Übergangsgraph*. Dieser bringt zwar einen Gewinn an Übersichtlichkeit, jedoch geht die Stufung des Baumdiagramms, die sich am zeitlichen Ablauf des Prozesses orientiert, durch das „Umbiegen“ der Pfeile verloren.

Ein großer Vorteil eines Übergangsgraphen besteht darin, dass er die rekursive Struktur des Prozesses gut erkennen lässt. Der Käfer beginnt zum Zeitpunkt  $k=0$  seine Wanderung, befindet sich dann also mit Sicherheit im Zustand A; Davon ausgehend kann man die Wahrscheinlichkeit  $a_k(x)$ , dass er sich nach  $k$  Minuten ( $k$  geradzahlig) im Zustand  $x$  befindet, schrittweise berechnen. Die dazu erforderlichen Rekursionsformeln entnimmt man aus Abbildung 5:

$$a_{k+2}(A) = \frac{1}{4} \cdot a_k(\gamma),$$

$$a_{k+2}(\gamma) = a_k(A) + \frac{1}{4} \cdot a_k(\gamma),$$

$$a_{k+2}(Z) = a_k(Z) + \frac{1}{2} \cdot a_k(\gamma).$$

Die Rechnungen führt man am einfachsten mit einer Tabellenkalkulation wie EXCEL durch mit den Startwerten  $a_0(A) = 1, a_0(\gamma) = a_0(Z) = 0$  (Tab. 2).

$k$	0	2	4	6	8	10
$a_k(A)$	1	0	0,250	0,063	0,078	0,035
$a_k(\gamma)$	0	1	0,250	0,313	0,141	0,113
$a_k(Z)$	0	0	0,500	0,625	0,781	0,852

Tab. 2: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nach  $k$  Minuten

Wie Tabelle 2 zeigt, nehmen die Werte von  $a_k(Z)$  recht ungleichmäßig zu. Es ist eine lohnende Aufgabe, den Prozess auch mithilfe von Simulationen zu studieren. Dabei stellt man fest, dass es bis zur Ankunft in Z sehr lange dauern kann. Damit erhebt sich die Frage, wie lang die Wartezeit im Mittel ist, ein Problem, dessen theoretische Lösung erst auf der Sekundarstufe II möglich ist.

### Mittlere Wartezeit – erste Vermutungen

Bereits aus einer Serie von etwa 100 Simulationen der Käferwanderung kann man die Wartezeit grob abschätzen; man findet fast immer einen Mittelwert zwischen 5 und 7. Eine etwas genauere Schätzung erlaubt die folgende Überlegung.

Wir betrachten die Anzahl  $k$  der vom Start bis zur Ankunft in Z verflossenen Minuten als Realisierung der Zufallsgröße  $T :=$  Wartezeit bis zur Absorption

und bezeichnen die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $T$  mit  $f$ , es sei also  $f(k) := P(T = k)$ . Dabei ist zu beachten, dass Z nur nach einer ungeraden Minutenzahl  $k = 2 \cdot m + 1$  (mit  $m \geq 1$ ) erreichbar ist und zwar nur aus dem Zustand  $\gamma$ .

Das Ereignis „Der Käfer erreicht Z nach genau  $k = 2 \cdot m + 1$  Minuten“ hat daher nach Abbildung 5 die Wahrscheinlichkeit

$$f(k) = f(2 \cdot m + 1) = \frac{1}{2} \cdot a_{2m}(\gamma).$$

Mit den Werten für  $a_{2m}(\gamma)$  aus Tabelle 2 ergibt sich Tabelle 3 für die Verteilung von  $T$ .

$k$	3	5	7	9	11	13
$f(k)$	0,5	0,125	0,156	0,07	0,057	0,032

Tab. 3: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartezeit  $T$

Die mittlere Wartezeit von A bis zur Absorption ist der Erwartungswert  $\tau_A := E(T)$ , den man jedoch nicht in der üblichen Weise berechnen kann, denn  $T$  kann unendlich viele Werte annehmen, nämlich jede ungerade Zahl ab 3. Die mittlere Wartezeit ist also  $\tau_A = \sum_{j=3}^{\infty} j \cdot f(j)$ . Die Teilsummen  $s_k := \sum_{j=3}^k j \cdot f(j)$  dieser unendlichen Reihe kann man leicht durch Erweiterung der für Tabelle 2 benutzten EXCEL-Tabelle berechnen. Der Graph von  $k \mapsto s_k$  (Abb. 6) lässt für die Teilsummen den Grenzwert 6 vermuten.

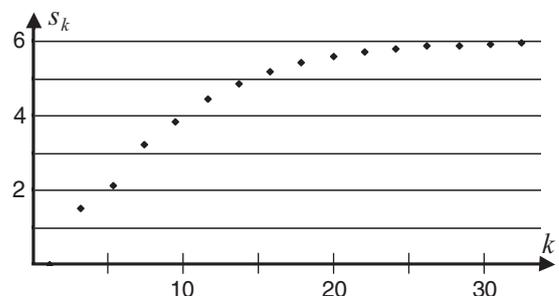


Abb. 6: Teilsummen  $s_k$  der unendlichen Reihe für  $\tau_A$

### Mittlere Wartezeit – exakte Berechnung

Um die obige Vermutung zu beweisen, liest man aus dem Übergangsgraphen in Abbildung 5 rechts ab, dass man von A aus zunächst zwei Minuten bis  $\gamma$  braucht, zu denen dann noch die Wartezeit  $\tau_\gamma$  (vom Zustand  $\gamma$  aus) hinzukommt, es gilt also

$$\tau_A = 2 + \tau_\gamma \quad (1)$$

Analog argumentiert man für  $\tau_\gamma$ . Wählt der Käfer die Kante nach Z, so dauert es eine Minute, bis er dort ist; andernfalls ist er nach zwei Minuten im Zustand A oder  $\gamma$ ; von wo aus dann noch einmal die mittle-

re Wartezeit  $\tau_A$  bzw.  $\tau_\gamma$  hinzukommt. Diese drei von  $\gamma$  aus möglichen Wartezeiten treten mit den Wahrscheinlichkeiten  $\frac{1}{2}$  bzw.  $\frac{1}{4}$  auf, so dass sich für  $\tau_\gamma$  deren gewichtetes Mittel ergibt:

$$\tau_\gamma = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (2 + \tau_A) + \frac{1}{4} \cdot (2 + \tau_\gamma). \quad (2)$$

Einsetzen von (1) und Zusammenfassen ergibt

$$\tau_\gamma = 2 + \frac{1}{2} \cdot \tau_\gamma \Leftrightarrow \tau_\gamma = 4.$$

Einsetzen in (1) bestätigt schließlich:  $\tau_A := 6$ .

#### 4 Irrfahrt – Weiterkrabbeln ohne Ziel

Als weitere Variante untersuchen wir in diesem Abschnitt Käferwanderungen auf den Würfelkanten ohne Absorption. Es gibt dann auch Übergänge von Z aus, und zwar nach  $\gamma$ , von wo man dann wegen des Umkehr-Verbots nur nach unten in die Ebene  $\beta$  weitergehen kann. Man muss nun also beachten, ob  $\gamma$  wie bisher von  $\beta$  aus aufwärts oder von Z aus abwärts durchlaufen wird; wir bezeichnen die beiden Fälle mit  $\gamma\uparrow$  und  $\gamma\downarrow$ . Entsprechend unterscheiden wir für  $\beta$  zwischen  $\beta\uparrow$  (aufwärts, von A aus kommend; es gibt nur Kanten, die in die Ebene  $\gamma$  führen) und  $\beta\downarrow$  (abwärts, von  $\gamma$  aus kommend, eine Kante führt nach A, eine andere nach  $\gamma$  zurück). Die neue Situation veranschaulicht Abbildung 7 links.

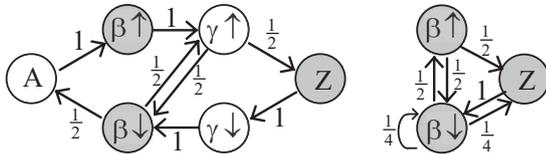


Abb. 7: Graph der Irrfahrt ohne Absorption in Z (links für jede Minute, rechts für ungerade Minutenzahlen)

Die Punktsymmetrie des linken Graphen in Abbildung 7 spiegelt die Symmetrie des Würfels wider, wobei sich jeweils die Zustände A und Z,  $\gamma\uparrow$  und  $\beta\downarrow$  sowie  $\gamma\downarrow$  und  $\beta\uparrow$  entsprechen. A,  $\gamma\uparrow$  und  $\gamma\downarrow$  werden jeweils nach einer geraden Minutenzahl erreicht (in Abb. 7 weiß); zu Z,  $\beta\downarrow$  und  $\beta\uparrow$  (graue Tönung) kann man nur nach ungerader Minutenzahl gelangen.

Wie bei der Wanderung mit Absorption in Abschnitt 3 betrachten wir auch hier die Zustände im Abstand von je 2 Minuten. Für ungerades  $k$  erhält man so den verkürzten Graph in Abbildung 7 rechts.

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten zu Beginn der Wanderung sind offenbar  $a_0(A) = 1$ ,  $a_0(x) = 0$  sonst, und nach einer Minute  $a_1(\beta\uparrow) = 1$ ,  $a_1(x) = 0$  sonst. Wie oben aus Abbildung 5 entnimmt man nun dem Graphen in Abbildung 7 rechts Rekursionsformeln

für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nach jeder ungeraden Minutenzahl  $k > 1$ :

$$a_k(\beta\uparrow) = \frac{1}{2} \cdot a_{k-2}(\beta\downarrow),$$

$$a_k(Z) = \frac{1}{2} \cdot a_{k-2}(\beta\uparrow) + \frac{1}{4} \cdot a_{k-2}(\beta\downarrow),$$

$$a_k(\beta\downarrow) = a_{k-2}(Z) + \frac{1}{2} \cdot a_{k-2}(\beta\uparrow) + \frac{1}{4} \cdot a_{k-2}(\beta\downarrow).$$

Aus Symmetriegründen erhält man die Formeln für gerade Minutenzahlen, indem man die Zustände  $\beta\uparrow$ ,  $\beta\downarrow$  und Z durch  $\gamma\downarrow$ ,  $\gamma\uparrow$  und A ersetzt.

In der Tabellenkalkulation erfordern diese Formeln nur geringfügige Änderungen gegenüber Tabelle 2, um die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die Irrfahrt ohne Absorption zu berechnen (Tab. 4).

k	A	$\gamma\uparrow$	$\gamma\downarrow$	k	Z	$\beta\downarrow$	$\beta\uparrow$
0	1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	3	0,500	0,500	0
4	0,250	0,250	0,500	5	0,125	0,625	0,250
6	0,313	0,563	0,125	7	0,281	0,406	0,313
8	0,203	0,516	0,281	9	0,258	0,539	0,203
10	0,270	0,473	0,258	11	0,236	0,494	0,270
12	0,247	0,517	0,236	13	0,258	0,495	0,247
14	0,247	0,494	0,258	15	0,247	0,505	0,247
16	0,253	0,500	0,247	17	0,250	0,497	0,253

Tab. 4: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nach  $k$  Minuten bei der Irrfahrt ohne Absorption mit Start in A

#### Irrfahrt mit zufälligem Startpunkt

Wegen der oben festgestellten Symmetrie kann man die Ecken A und Z als äquivalent für den Start der Irrfahrt ansehen. Die Wahl des Startzustandes kann man daher auch dem Zufall überlassen (z. B. Adler oder Zahl beim Wurf einer 1-€-Münze).

Anders als in Tabelle 4 hat man dann die Startwerte  $a_0(A) = a_0(Z) = 0,5$  und  $a_1(\beta\uparrow) = a_1(\gamma\downarrow) = 0,5$ . Für  $k > 3$  werden alle  $a_k(x)$  größer als 0. In Abbildung 8 sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von  $k$  dargestellt.

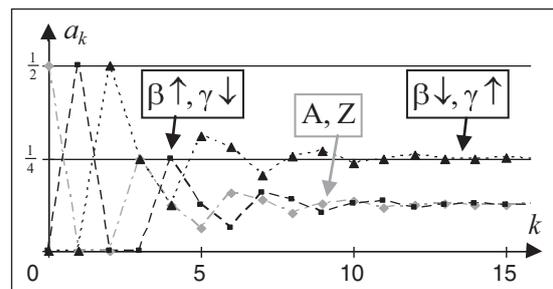


Abb. 8: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nach  $k$  Minuten bei Irrfahrt ohne Absorption mit Start in A oder Z

Dabei zeigt sich ein für derartige Prozesse typisches Bild: Die Folgen  $a_k(x)$  konvergieren offenbar (für die Zustände  $\beta\uparrow$ ,  $\gamma\downarrow$ , A und Z gegen  $\frac{1}{8}$ , dagegen für  $\beta\downarrow$  und  $\gamma\uparrow$  gegen  $\frac{1}{4}$ ). Man bestätigt leicht, dass sich bei diesen Werten die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände nicht mehr ändern; eine derartige Verteilung heißt *stationär*.

### Verteilung auf die Ecken des Würfels

Abschließend übertragen wir die zuletzt gefundenen Ergebnisse zurück auf den konkreten Würfel und benutzen dabei noch einmal die Methode der natürlichen Häufigkeiten. Lassen wir 96 Käfer wandern, so erwarten wir schließlich je 12 in A und Z. In den Ebenen  $\beta$  und  $\gamma$  sind je  $(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}) \cdot 96 = 36$  Käfer zu erwarten und somit 12 an jeder der drei gleichberechtigten Ecken in diesen Ebenen.

Wir kommen damit zu dem sehr plausiblen Ergebnis, dass man sich bei der Irrfahrt auf den Würfelkanten im Laufe der Zeit immer mehr einer Gleichverteilung bezüglich der Ecken annähert.

## 5 Schlussbemerkungen

Obwohl es sich bei den hier behandelten stochastischen Prozessen um Markow-Ketten handelt, habe ich den Begriff bisher bewusst nicht verwendet. Es war mein Anliegen, typisch mathematische Vorgehensweisen zu thematisieren, durch die man verschiedene prozessbezogene Kompetenzen (Niedersächsisches Kultusministerium 2006) fördern kann:

- Vermutungen präzisieren und sie einer mathematischen Überprüfung zugänglich machen, auch unter Verwendung geeigneter Medien (Beispiel: Mittlere Wartezeit in Abschnitt 3)
- Zerlegen in Teilprobleme, (Beispiel: Zerlegung des Graphen in Abb. 7)

- Variieren von Bedingungen (Beispiel: Aufhebung der Zeitbegrenzung auf 3 Minuten, Verzicht auf die Absorption in Z)
- Modelle variieren und verknüpfen (Beispiele: Wechsel von natürlichen Häufigkeiten zum Baumdiagramm und weiter zum Übergangsgraphen; dort Anwendung der Pfadregeln)
- Rekursionen verwenden zur Ermittlung von Lösungen im mathematischen Modell (Beispiele: Tab. 2, 3, 4; Abb. 6)

Als Transferaufgabe zur Festigung dieser Kompetenzen bietet sich das Studium einer Käferwanderung auf dem Oktaeder an.

Eine detailliertere Darstellung zu den hier nur kurz angesprochenen Begriffen mittlere Wartezeit, nicht absorbierende Markow-Ketten und stationäre Verteilung gibt der Klassiker von Engel (1976). Darin werden auch die Querverbindungen dieser Theorie zur Analysis und zur Linearen Algebra deutlich (Wartezeiten und Absorptionswahrscheinlichkeiten berechnet man mit linearen Gleichungssystemen). Mit den Mitteln der Analysis kann man die hier nur anhand von Tabellen und den zugehörigen Graphen (Abb. 6 und 8) vermuteten Grenzwerte dann auch mathematisch korrekt nachweisen,

### Literatur

- Engel, A. (1976): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Bd. 2. Stuttgart: Klett.
- Niedersächsisches Kultusministerium (2006): Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5–10 – Mathematik (als pdf-Datei auf <http://db2.nibis.de/>)
- Winkenbach, B. (2011): Die Käferwanderung auf dem Würfel. In: *Stochastik in der Schule* 31 (2), S. 23–27.

### Anschrift des Verfassers

Gerd Riehl  
 Obere Mark 6  
 30890 Barsinghausen  
 Gerd.Riehl@t-online.de